ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

TRẦN THỊ QUỲNH TRANG

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI HỌ VÔ HẠN ĐẾM ĐƯỢC CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 11/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—————o0o—————

TRẦN THỊ QUỲNH TRANG

BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI HỌ VÔ HẠN ĐẾM ĐƯỢC CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

TS. TRẦN XUÂN QUÝ

THÁI NGUYÊN, 11/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a,b]$	tập các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều được nhà toán học người Italia là G. Stampacchia và các đồng nghiệp đưa ra lần đầu tiên vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX trong khi nghiên cứu về bài toán biên tự do (xem [11, 13, 14]). Bất đẳng thức biến phân có vai trò quan trọng trong nghiên cứu toán học lý thuyết về bài toán tối ưu, bài toán điều khiển, bài toán cân bằng, bài toán bù, bài toán giá trị biên... (xem [7, 10, 18] và các tài liệu được trích dẫn trong đó). Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân đang là một trong những đề tài thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước và nhiều kết quả sâu sắc đã được thiết lập. Bên cạnh đó, bất đẳng thức biến phân còn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế như mô hình cân bằng trong kinh tế, giao thông, bài toán khôi phục tín hiệu, bài toán công nghệ lọc không gian, bài toán phân phối băng thông...

Cho đến nay, nhiều vấn đề mới và khó liên quan đến bất đẳng thức biến phân và các bài toán tối ưu, mà điều kiện cần cực trị của chúng được viết dưới dạng các bất đẳng thức biến phân, vẫn đang được quan tâm nghiên cứu bằng những công cụ toán học hiện đại. Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng hiện nay là xây dựng phương pháp giải bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn, tập không điểm chung của một họ ánh xạ loại j-đơn điệu, tập nghiệm chung của bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert và không gian Banach.

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày phương pháp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trên không gian Hilbert và không gian Banach từ các bài báo [8] và [9].

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1 trình bày một phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert với tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn. Nội dung của chương này được tham khảo từ một số tài liệu cơ bản về Giải tích hàm và bài báo [9] công bố năm 2008.

Chương 2 trình bày một phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach với tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn. Nội dung của chương được viết trên cơ sở kết quả trong [8] công bố năm 2018.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng TS. Trần Xuân Quý, xin được cám ơn cô và thầy đã tận tình hướng dẫn cũng như dành cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy cô, những người đã tận tâm giảng dạy và chỉ bảo cho tôi trong suốt quá trình học tập cũng như khi thực hiện luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 11 năm 2018

Tác giả luận văn

Trần Thị Quỳnh Trang

Chương 1

Xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert

Chương này trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Nội dung của chương được viết trên cơ sở bài báo của Iemoto và Takahashi trong [9] công bố năm 2008.

1.1 Ánh xạ đơn điệu trong không gian Hilbert

Mục này trình bày khái niệm và một số tính chất của không gian Hilbert thực H, khái niệm về ánh xạ đơn điệu, liên tục Lipschitz, ánh xạ không giãn và một số tính chất.

1.1.1 Phép chiếu mêtric

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\| \cdot \|$ và cho C là một tập con lồi đóng của H. Ta ký hiệu sự hội tụ mạnh và hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ tới $x \in H$ lần lượt là $x_n \to x$ và $x_n \rightharpoonup x$.

Định nghĩa 1.1.1 Dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn xét không gian $l^2 = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ và $\{e_n\} \subset l^2$ được cho bởi

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, \dots, 0, \dots),$$

với mọi $n \geq 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 < \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$ (xem [2]).

Bổ đề 1.1.2 (xem [2]) *Trong không gian Hilbert thực H ta có bất đẳng thức sau:*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle x + y, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Mệnh đề 1.1.3 (xem [2]) *Cho C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C x \in C$ sao cho*

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\| \quad \text{với mọi} \quad y \in C. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf\limits_{u \in C} \|x - u\|$. Khi đó, tồn tại $\{u_n\} \subset C$ sao cho $\|x - u_n\| \to d$ khi $n \to \infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= \|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2 \\
&= 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2) - 4d^2 \to 0,
\end{aligned}$$

khi $n, m \to \infty$. Do đó $\{u_n\}$ là dãy Cauchy trong H. Suy ra tồn tại $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \in C$. Do chuẩn là hàm số liên tục nên $\|x - u\| = d$. Giả sử tồn tại $v \in C$ sao cho $\|x - v\| = d$. Ta có

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \|(x - u) - (x - v)\|^2 \\
&= 2(\|x - u\|^2 + \|x - v\|^2) - 4\left\|x - \frac{u + v}{2}\right\|^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $u = v$. Vậy tồn tại duy nhất một phần tử $P_C x \in C$ sao cho $\|x - P_C x\| = \inf_{u \in C} \|x - u\|$.

$\square$

Định nghĩa 1.1.4 Phép cho tương ứng mỗi phần tử $x \in H$ một phần tử $P_C x \in C$ xác định như (1.1) được gọi là phép chiếu mêtric chiếu H lên C.

Ví dụ 1.1.5 Cho $C = \{x \in H : \langle x, u\rangle = y\}$, với $u \neq 0$. Khi đó

$$P_C x = x + \frac{y - \langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u.$$

Mệnh đề dưới đây cho ta một điều kiện cần và đủ để ánh xạ $P_C : H \to C$ là một phép chiếu mêtric.

Mệnh đề 1.1.6 (xem [2]) *Cho C là một tập con lồi đóng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, điều kiện cần và đủ để ánh xạ $P_C : H \to C$ là phép chiếu mêtric từ H lên C là*

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in H \text{ và } y \in C. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Giả sử P_C là phép chiếu mêtric. Khi đó với mọi $x \in H$, $y \in C$ và mọi $t \in (0, 1)$, ta có $ty + (1 - t)P_C x \in C$. Do đó, từ định nghĩa của phép chiếu mêtric, suy ra

$$\|x - P_C x\|^2 \leq \|x - ty - (1 - t)P_C x\|^2 \quad \forall t \in (0, 1).$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\|x - P_C x\|^2 \leq \|x - P_C x\|^2 - 2t\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle + t^2\|y - P_C x\|^2,$$

với mọi $t \in (0, 1)$. Từ đó,

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq -\frac{t}{2}\|y - P_C x\|^2 \quad \forall t \in (0, 1).$$

Cho $t \to 0^+$, ta nhận được

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq 0.$$

Ngược lại, giả sử

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in H \text{ và } y \in C.$$

Khi đó, với mỗi $x \in H$ và $y \in C$, ta có

$$\|x - P_C x\|^2 = \langle x - P_C x, x - y + y - P_C x\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle x - P_C x, y - P_C x\rangle + \langle x - P_C x, x - y\rangle \\
&\leq \|x - y\|^2 + \langle y - P_C x, x - P_C x + P_C x - y\rangle \\
&= \|x - y\|^2 + \langle y - P_C x, x - P_C x\rangle - \|y - P_C x\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2.
\end{aligned}
$$

Suy ra P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C.

□

Hệ quả 1.1.7 (xem [2]) *Cho C là một tập con lồi đóng của không gian Hilbert H và P_C là phép chiếu mêtric từ H lên C. Khi đó, với mọi $x, y \in H$, ta có*

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle x - y, P_C x - P_C y\rangle.$$

Chứng minh. Với mọi $x, y \in H$, từ Mệnh đề 1.1.6, ta có

$$
\begin{aligned}
&\langle x - P_C x, P_C y - P_C x\rangle \leq 0, \\
&\langle y - P_C y, P_C x - P_C y\rangle \leq 0.
\end{aligned}
$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta nhận được điều phải chứng minh.

□

1.1.2 Ánh xạ không giãn, ánh xạ đơn điệu

Định nghĩa 1.1.8 Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Ánh xạ $T:\ C \to H$ được gọi là một ánh xạ không giãn, nếu

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.3}$$

Ta ký hiệu tập điểm bất động của ánh xạ không giãn T là $\mathrm{Fix}(T)$, tức là $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in C : Tx = x\}$. Tính chất của tập điểm bất động $\mathrm{Fix}(T)$ của ánh xạ không giãn T được cho trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.1.9 (xem [3]) *Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $T:\ C \to H$ là một ánh xạ không giãn. Khi đó,* $\mathrm{Fix}(T)$ *là một tập con lồi và đóng trong H.*

Chứng minh. (a) Giả sử $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Trước hết, ta chỉ ra $\mathrm{Fix}(T)$ là tập đóng. Thật vậy, vì T là ánh xạ không giãn nên T liên tục trên C. Giả sử